



Cauchy, Sturm et les racines des équations

Hourya Benis Sinaceur

► To cite this version:

Hourya Benis Sinaceur. Cauchy, Sturm et les racines des équations. *Revue d'Histoire des Sciences*, 1992, 45 (1), pp.51-68. 10.3406/rhs.1992.4231 . halshs-01119593

HAL Id: halshs-01119593

<https://shs.hal.science/halshs-01119593>

Submitted on 23 Feb 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Cauchy, Sturm et les racines des équations (*)

RÉSUMÉ. — S'appuyant à la fois sur les données chronologiques et sur l'analyse des textes concernés, cet article détermine les interférences entre les travaux consacrés, de 1829 à 1840 environ, par A.-L. Cauchy et par Ch.-F. Sturm aux racines des équations algébriques. Son premier objectif est donc de préciser les faits d'une micro-histoire étroitement bornée dans le temps et circonscrite à une question tout à fait déterminée quoiqu'inséparable des recherches engagées dans l'édification de la physique mathématique au début du XIX^e siècle. Son deuxième objectif est d'ordre épistémologique. Car il met en évidence les deux questions sous-jacentes à ces allers et retours entre Cauchy et Sturm : 1° peut-on substituer des méthodes algébriques aux méthodes analytiques alors habituellement employées dans la résolution numérique des équations ? 2° l'algèbre peut-elle constituer un champ d'étude complètement autonome ?

SUMMARY. — *Relying both on chronological data and textual analysis, this article seeks to determine the mutual influence between A.-L. Cauchy's and Ch.-F. Sturm's research from 1829 to around 1840 on the roots of algebraic equations. The first aim is to specify the elements of a micro-history, strictly limited in time and centered on a well-defined question, yet bound up with the endeavour to build up a mathematical physics at the beginning of the 19th century. The second aim pertains to philosophy of science; for two questions that underlie the to-and-fro motion between Cauchy and Sturm arise: 1° can algebraic methods replace the analytic methods currently employed then in the numerical solution of equations? 2° can algebra constitute an entirely autonomous field of study?*

Le but de cet article est de mettre en évidence les interférences entre les travaux de Cauchy et ceux de Sturm sur les racines des équations algébriques, dans la décennie qui commence en 1829. Le 25 mai de cette année-là, Arago lit, à la séance de l'Académie des sciences de Paris, un mémoire soumis par Sturm qui contient

(*) A la fin de l'article, une bibliographie fournit les références complètes des publications et travaux cités ci-après dans le texte et les notes.

Les questions traitées dans cet article ont été reprises et plus amplement développées dans mon ouvrage [Benis-Sinaceur, 1991].

son fameux théorème sur le nombre de racines réelles d'une fonction polynomiale (1). La communication est très remarquée mais le mémoire ne sera publié qu'en 1835 (2). Seul un extrait paraît dans le *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques* du baron de Férussac [Sturm, 1829a].

CHRONOLOGIE

A vrai dire, Cauchy a lu, dès 1813, à l'Académie, plusieurs mémoires sur le même sujet, et en a publié les résultats en 1815, dans le dix-septième cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique* [Cauchy, 1815]. Mais Sturm, né en 1803 à Genève, n'avait que douze ans en 1815, et ne vint s'installer à Paris qu'en 1825. Il a alors 22 ans et travaille, avec son ami Daniel Colladon, sur la compression des liquides. On sait que les deux jeunes gens sont accueillis « avec la plus aimable bienveillance » [Colladon, 1878] par Ampère, Arago et Fourier et sont engagés comme préparateurs dans le cabinet de physique d'Ampère [Colladon, 1857]. Ils suivent les cours de Lacroix au Collège de France sur le calcul différentiel et intégral et ceux de Cauchy à la Sorbonne. Et surtout,

(1) Rappelons qu'il s'agit du théorème ci-après.

Soit une équation polynomiale de degré m quelconque :

$$V = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Soit V_1 la dérivée de V , ou une fonction ayant toujours le même signe que cette dérivée. La division euclidienne permet d'écrire : $V = V_1 Q_1 + R_1$.

On pose $R_1 = -V_2$ et on divise V_1 par V_2 ; on obtiendra :

$$V_1 = V_2 Q_2 + R_2.$$

On pose $R_2 = -V_3$, et on continue le processus des divisions successives jusqu'à parvenir, si du moins V et V_1 n'ont pas de racine commune, à une dernière équation :

$$V_{r-2} = V_{r-1} Q_{r-1} - V_r \text{ avec } r \leq m \text{ et } V_r \text{ égale à une constante numérique.}$$

Soient deux nombres réels $a < b$; on écrit la suite S_a des signes des fonctions de la suite V, V_1, V_2, \dots, V_r , quand on substitue a à x ; on écrit de même la suite S_b . On compte le nombre N_a de variations de signe dans S_a et de même le nombre N_b . $N_a - N_b$ est exactement égal au nombre des racines réelles de l'équation $V = 0$ comprises dans l'intervalle $[a, b]$.

(2) Il n'est pas sûr que le mémoire publié en 1835 soit exactement identique à celui lu par Arago en 1829. Nous connaissons l'existence de ce dernier par les *Procès-verbaux...* [1921-1922], t. 9, 252-253, mais il n'a pas été retrouvé.

ils deviennent très liés à Fourier qui leur propose des sujets de recherche en rapport avec ses propres travaux sur la diffusion de la chaleur. C'est ainsi que Sturm est mis par Fourier sur la voie qui va conduire à ses résultats sur les équations numériques [1829a, 1835], sur les équations différentielles linéaires du second ordre et sur les équations différentielles à dérivées partielles (3).

Cependant, en 1829 et 1830, Sturm est rédacteur principal pour la section mathématique du *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques* du baron de Férussac. A ce titre, il publie dans les tomes XI, XII et XIII de ce *Bulletin*, non seulement des résumés de ses propres travaux, mais aussi des comptes rendus d'ouvrages ou de mémoires. On relèvera ici le compte rendu des 40^e, 41^e et 42^e livraisons des *Exercices de mathématiques de Cauchy* [Sturm, 1829b]. Il nous apprend que Sturm avait pris connaissance de [Cauchy, 1815] ainsi que des deux mémoires dont il rendait compte : l'un [Cauchy, 1829a] présenté sous le titre « Sur la résolution numérique des équations et sur la théorie de l'élimination » à l'Académie le 1^{er} juin 1829, dans la séance consécutive à celle où le théorème d'algèbre de Sturm fut communiqué par Arago (4); l'autre [Cauchy, 1829b] intitulé « Sur les équations algébriques à l'aide desquelles on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planètes » et présenté à l'Académie dans la séance du 27 juillet 1829 (5).

L'observation des dates montre que [Sturm, 1829a] est indépendant de [Cauchy, 1829a]. L'analyse interne des contenus confirme cela et permet d'ajouter que [Cauchy, 1815] n'a pas eu d'incidence sur [Sturm, 1829a]. Sturm affirme, par ailleurs, qu'il avait trouvé des résultats semblables aux deux théorèmes de [Cauchy, 1829b] avant d'en avoir pris connaissance [Sturm, 1829b, 303].

En revanche [Sturm, 1829a], qui couvrit son auteur de gloire et fut largement connu au-delà même des frontières françaises (6),

(3) Sturm présente à l'Académie des Sciences de Paris, le 27 juillet 1829, un « Mémoire sur l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires » [*Procès-verbaux...*], t. 9, 283. Un extrait en est publié dans le *Bulletin de Férussac* [Sturm, 1829c]. Le 30 septembre 1833 et le 27 juillet 1835, Sturm présente deux nouveaux mémoires sur le même sujet [*Procès-verbaux...*], t. 10, 35 et 73. L'ensemble des résultats paraît dans [Sturm, 1836a] et [Sturm, 1836b].

(4) Cf. [*Procès-verbaux...*], t. 9, 258.

(5) Cf. [*Procès-verbaux...*], t. 9, 283.

(6) Dès 1830, A. von Ettingshausen publie son exposé du théorème d'algèbre de Sturm dans une revue viennoise, *Zeitschrift für Physik, Mathematik und verwandte Wissenschaften*,

inspira à Cauchy l'élaboration qu'il fit de son calcul des résidus dans un mémoire présenté à l'académie de Turin le 27 novembre 1831 [Cauchy, 1831]. Dans ce mémoire, Cauchy expose sa théorie des indices dont il déduit un théorème sur le nombre et la localisation dans le plan complexe des racines (réelles ou imaginaires) des équations algébriques. A son tour, Sturm, en collaboration avec Liouville, donne, en 1836, une démonstration simplifiée [Sturm, 1836c] de ce théorème de Cauchy, et celle-ci prolonge les procédés déjà utilisés pour le théorème d'algèbre de 1829. Cauchy a connaissance de la démonstration de Sturm et Liouville par la note qu'ils communiquent à l'Académie à ce sujet [Sturm, 1837]. Mais en 1837, il publie son « Calcul des indices des fonctions » [Cauchy, 1837a], qui reprend le contenu du mémoire de Turin sans profiter des simplifications de Sturm et Liouville. Dans une note de ce mémoire [Cauchy, 1837a, 464], il signale avoir appris que « des démonstrations élémentaires [...] ont été données, pour la première fois, par MM. Sturm et Liouville, dans un mémoire qu'il ne connaît pas encore », faute d'avoir reçu l'exemplaire qu'ils lui ont adressé. L'abbé Moigno, dont on sait l'intérêt pour les travaux de Cauchy, écrit en 1840 une note synthétique où il présente le théorème de Cauchy dans une version très nettement sturmienne [Moigno, 1840]. De son côté, Serret reprend la démonstration de Sturm et Liouville pour son exposé didactique du théorème de Cauchy [Serret, 1849, 117-131].

Au terme de cette revue de faits, on peut conclure à une double influence de [Sturm, 1829a] sur le théorème de Cauchy relatif au nombre et à la localisation dans le plan des racines des équations algébriques. D'une part, une influence directe sur Cauchy reconnue dans le mémoire de Turin de 1831. D'autre part, un impact indirect sur son théorème, exercé par le biais des exposés didactiques de Moigno et surtout de Serret dont le manuel a formé des générations de mathématiciens. La raison de ce double effet est évidente : la méthode employée dans [Sturm, 1829a] puis dans [Sturm, 1836c] permet de *simplifier* la démonstration de Cauchy. Cette simplification s'est accompagnée d'un débat : faut-il, s'agissant de résolu-

t. 7, 444-450. Cet exposé suscite bientôt une étude de A. L. Crelle (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 13 (1835), 119-144). Les travaux anglais sur le théorème de Sturm, de Sylvester, de Cayley, etc., sont plus tardifs. On trouvera, en annexe (p. 438-447) de mon livre [Benis-Sinaceur, 1991], une liste assez complète des travaux relatifs au théorème de Sturm.

tion numérique des équations, chercher à remplacer les méthodes analytiques de démonstration par des méthodes algébriques réputées plus simples? C'est ce débat que nous allons maintenant présenter dans le contexte des théorèmes de Sturm et de Cauchy sur le nombre et la localisation des racines des équations et qui va nous servir de fil directeur dans l'analyse interne des notes ou mémoires concernés.

[STURM, 1829a] : LA FIDÉLITÉ AUX PRINCIPES DE FOURIER

Il faut d'abord rappeler que [Sturm, 1829a] n'a pas cherché explicitement à évincer les procédures analytiques au profit de démonstrations purement algébriques. Sans reprendre une analyse détaillée faite ailleurs [Benis-Sinaceur, 1988, 1991, première partie], disons que Sturm était largement tributaire du théorème de Fourier par lequel on trouve un majorant du nombre de racines réelles d'une équation numérique entre deux limites données qui peuvent éventuellement être $-\infty$ et $+\infty$ [Fourier, 1831]. Le théorème de Fourier est une généralisation de la règle de Descartes démontrée par une méthode inspirée de celle de Rolle, puisqu'elle est fondée sur le calcul des cascades ou dérivées successives de la fonction polynomiale associée à l'équation proposée. Bien que Rolle ait lui-même élaboré sa méthode dans une perspective algébrique [Rolle, 1690], Fourier la considère comme « une application [...] de l'analyse différentielle » [Fourier, 1831, 10]. Par ce biais et d'autres encore, la résolution numérique des équations est, selon lui « une des plus importantes applications du calcul différentiel » [Fourier, 1831, 18]. Les résultats obtenus sont ainsi le produit d'un esprit concordataire qui n'hésite pas à marier les méthodes algébriques (règle de Descartes) à celles de l'analyse (différentiation, considération d'éléments infiniment petits...) et de la géométrie (étude locale des courbes associées aux fonctions). Cet esprit concordataire s'oppose en particulier à l'idéal algébriste de Lagrange.

[Sturm, 1829a] a déclaré sa fidélité aux principes de Fourier. Pour l'essentiel, cette fidélité consiste à immerger l'usage de la règle de Descartes dans un contexte qui emprunte quelques concepts

ou théorèmes fondamentaux à la théorie des fonctions et au calcul infinitésimal : le concept de fonction lui-même, celui de fonction continue, le théorème de Bolzano selon lequel toute fonction continue changeant de signe sur un intervalle réel $[a, b]$ s'annule au moins une fois sur cet intervalle, etc. Mais, plutôt qu'à la suite des fonctions différentielles de la fonction proposée, Sturm a l'idée d'appliquer le raisonnement de Fourier à une suite de fonctions auxiliaires construites par division euclidienne, et donc par une méthode « purement algébrique », généralement employée pour déterminer les racines multiples des équations. Sturm n'a pas utilisé l'algorithme d'Euclide pour éviter les notions différentielles, mais comme un moyen de pallier l'ambiguïté du théorème de Fourier. La démonstration de celui-ci souffrait, en effet, de l'absence de corrélation *exacte* entre deux faits que le théorème de Sturm donne pour équivalents : d'une part, le fait que la suite des fonctions construites à partir de la fonction donnée perde une variation de signe sur l'intervalle réel $[a, b]$; d'autre part, le fait que la fonction donnée s'annule pour une valeur appartenant à cet intervalle. Si chaque perte de variation de signe correspond à un zéro de la fonction et réciproquement, on obtient le nombre exact des racines réelles d'une équation et pas seulement un majorant de ce nombre. Cependant, que Sturm ait cherché à l'obtenir ou non, il y a un effet *objectif* de la substitution de la division euclidienne à la différentiation. Une perspective différente de celle de Fourier est ouverte, qui renoue avec l'ambition de Lagrange de démontrer de façon purement algébrique les propositions relatives aux équations algébriques [Lagrange, 1798, 19-20]. Sturm, trop proche de Fourier, ne fait aucun commentaire sur ce renversement épistémologique potentiel. Il est probable qu'il n'en a pas immédiatement, dès 1829, une conscience claire.

[CAUCHY, 1829a] : LES « PREMIERS PRINCIPES DE L'ALGÈBRE »

De son côté, [Cauchy, 1829a] expose de façon indépendante une méthode de résolution numérique liée à la théorie de l'élimination algébrique. L'esprit en est totalement différent de celui caractérisant la méthode présentée dans le mémoire de 1815, qui reprenait

les considérations géométriques des travaux présentés par l'abbé de Gua à l'Académie en 1741, en tâchant de les traduire dans un langage analytique. Cette fois, en évoquant les travaux de Newton, d'Euler, de Lagrange et de Budan sur les équations numériques, Cauchy leur reproche de s'appuyer sur « des théories étrangères aux éléments d'Algèbre » et de ne pas offrir « de règles certaines pour la détermination *a priori* du nombre des racines réelles ». En ce qui concerne Fourier, Cauchy affirme ne pas avoir d'« idée précise » sur sa méthode. Pourtant, comme lui, il veut éviter la méthode lagrangienne de résolution par l'auxiliaire de l'équation aux carrés des différences. Mais, contrairement à lui, loin de voir dans l'analyse différentielle un recours indispensable, il ne veut user d'aucune « notation étrangère à ceux qui ne possèdent que les premiers principes de l'Algèbre » [Cauchy, 1829*a*, 89]. C'est donc Cauchy, et non Sturm, qui, en 1829, relance délibérément avec l'algébrisme de Lagrange.

Mais qu'entend ici Cauchy par « premiers principes de l'Algèbre » ? On peut le déterminer par le contexte. Il s'agit des règles simples de résolution des équations du premier et du second degrés, des règles usuelles de calcul sur les quantités imaginaires, des règles de résolution des équations binômes et, pour ce qui concerne les équations de degré quelconque, d'une version algébrique du théorème de Bolzano énoncée ainsi : un polynôme qui change de signe entre deux valeurs réelles a et b s'annule pour une valeur appartenant à l'intervalle $[a, b]$. Ce théorème a pour Cauchy le statut d'une « évidence première ». Il en donne, en quatre lignes, une « démonstration » qui repose sur la clarté [!] du fait qu'en « variant par degrés insensibles », le polynôme s'évanouit forcément au moment où il passe du positif au négatif et *vice versa*. En supposant implicitement qu'un polynôme est une *fonction continue*, Cauchy n'a donc pas le sentiment d'utiliser une notion étrangère aux « premiers principes de l'Algèbre ». Cela nous apprend que sa distinction entre algèbre et analyse ne coïncide pas avec celle de Lagrange, plus proche de notre division actuelle à ceci près que Lagrange ne disposait ni de la construction algébrique du corps des nombres complexes comme corps algébriquement clos [Steinitz, 1910] ni de la construction algébrique du corps des nombres réels comme corps réel clos [Artin et Schreier, 1926].

Sturm, dans son compte rendu de [Cauchy, 1829*a*], note que la démonstration de Cauchy, nouvelle par rapport à celle de 1815,

est « purement algébrique » [Sturm, 1829*b*, 301]. Il est donc d'accord avec Cauchy que raisonner sur des polynômes en se servant de leur propriété d'être des fonctions continues reste dans les limites de l'algèbre. S'il avait explicitement tiré toutes les conséquences de ce point de vue, il aurait observé que sa propre démonstration de 1829 était également « purement algébrique » en ce sens. Il ne le fait ni alors ni plus tard quand, en 1835, il publie le mémoire qui contient son théorème. Cependant, Sturm a dû être frappé par l'expression « premiers principes de l'Algèbre ». Il s'en souviendra en 1836 quand il voudra simplifier [Cauchy, 1831] en évinçant les notions du calcul des résidus au profit des « premiers principes de l'Algèbre ». A moins que, s'agissant d'une expression somme toute plus spécifique d'une époque que d'un auteur, son occurrence répétée chez Cauchy et chez Sturm ne signale une volonté partagée de dériver, dans les cas où on le peut, des démonstrations à partir de propositions le plus élémentaires possible, étant sous-entendu que celles-ci sont généralement du ressort de l'algèbre. Dans une hypothèse comme dans l'autre, on voit pointer une hiérarchisation par laquelle l'algèbre, considérée comme plus simple et plus générale, est placée devant l'analyse. Le renversement est net par rapport à Fourier pour qui l'analyse, permettant l'expression d'une variété plus grande de phénomènes physiques, est plus générale que l'algèbre. En même temps, le critère de généralité semble avoir changé. Intérieur aux mathématiques au lieu de leur être extérieur, il mesure l'étendue des applications possibles aux autres branches des mathématiques et non pas à l'expression des phénomènes physiques.

LA THÉORIE DES INDICES

[Cauchy, 1831] fait état de la connaissance acquise du théorème de Sturm aussi bien que de celui de Fourier. Cauchy note l'originalité essentielle de Sturm : l'utilisation judicieuse de l'algorithme d'Euclide avec le changement de signe du reste de chaque division (7).

(7) Cauchy remarque en effet que « l'opération connue sous le nom de division algébrique suffira pour déterminer combien de racines réelles ou imaginaires d'une équation de degré quelconque offrent des modules inférieurs à un nombre donné, ou des parties réelles comprises entre des nombres donnés » [Cauchy, 1831 : OC (2), II, 172].

Cauchy intègre cette division « sturmienne » à la théorie des indices qui le préoccupe alors.

L'indice d'une fonction f , supposée infinie pour une valeur a de la variable x , est $+1$ si $f(x)$ passe, en devenant infinie, du négatif au positif, -1 si elle passe du positif au négatif, 0 si elle ne change pas de signe. L'indice intégral de f est la somme des indices correspondant aux valeurs de x qui rendent f définie sur un intervalle donné; soit symboliquement $\mathcal{G}_{x_0}^X((f(x)))$, suivant un usage déjà établi pour le calcul des résidus.

Cauchy démontre :

1° que la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires des équations algébriques ou transcendentes se réduit à la détermination des indices des fonctions;

2° que la détermination de l'indice d'une fonction rationnelle peut être ramenée à la recherche du plus grand commun diviseur algébrique entre les polynômes qui composent ses deux termes;

3° que pour une fonction $f(z) = f(x + iy)$, x et y étant considérées comme des coordonnées rectangulaires, si on trace dans le plan un contour $0\ 0'\ 0'' \dots$ en prenant pour s une longueur variable sur ce contour, mesurée à partir d'un point fixe et dans le sens de rotation direct, on pourra considérer la fonction $\psi(s)$ comme étant le rapport φ/χ quand on a exprimé $f(z) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\chi(x, y)$, φ et χ étant des fonctions réelles de x et de y . Les racines réelles et imaginaires de l'équation $f(z) = 0$ offriront respectivement les valeurs de x et y propres à représenter les coordonnées d'un point du plan. On établit dans ces conditions que le nombre des racines correspondant à ces points internes au contour $00'0'' \dots$ est la moitié de l'indice intégral de la fonction $\psi(s)$ étendu au périmètre entier de ce contour; et que le résidu intégral d'une fonction quelconque de z , étendu à toutes les racines dont il s'agit, peut être exprimé par une intégrale définie très simple et relative à l'arc s . Cette dernière proposition offre le moyen de représenter par une seule intégrale définie la somme des racines correspondantes à des points renfermés dans le contour $00'0'' \dots$, ou la somme de fonctions semblables (8) de ces racines [Cauchy, 1831 : *OC* (2), II, 178-183].

Reprise par Cauchy dans le cadre de la théorie des intégrales

(8) C'est-à-dire invariantes pour les permutations des racines.

définies et du calcul des résidus, la division « sturmienne » se trouve ainsi détournée de son but : simplicité, commodité, exécutabilité. Hermite fera, en 1852, l'épreuve propédeutique des difficultés de la méthode de Cauchy avant de se tourner résolument dans une autre direction.

LE THÉORÈME DE CAUCHY REVU PAR STURM ET LIOUVILLE

On aurait pu croire que la difficulté du théorème de [Cauchy, 1831] venait de ce que le travail s'y fait dans le « plan complexe » alors que [Sturm, 1829a] se limite à la « droite réelle », le nombre des racines complexes étant déduit par différence entre le nombre total de racines et le nombre de racines réelles. Mais [Sturm, 1836c] prouve le contraire. Il simplifie l'énoncé du théorème de Cauchy en éliminant les notions d'indice intégral et de résidu et en s'en tenant à la vieille notion d'excès. A un polynôme $F(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$, on associe la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$. Si j est le nombre de fois où elle s'annule en passant du positif au négatif, k le nombre de fois où elle s'annule en passant du négatif au positif, l'excès $j-k$ est double du nombre de racines contenues dans le contour donné. Les changements de signe de $\frac{P}{Q}$ quand elle passe par l'infini et le fait qu'elle peut s'annuler sans changer de signe sont sans importance car sans incidence sur le nombre des racines. On tient donc compte exclusivement des cas où $\frac{P}{Q}$ s'annule en changeant simultanément de signe.

La démonstration, remarquent les auteurs par une expression identique à celle de [Cauchy, 1829a], « repose uniquement sur les premiers principes de l'Algèbre ». Et dans ces premiers principes sont compris des éléments de théorie des nombres complexes, l'utilisation des coordonnées polaires et des résultats de trigonométrie comme la formule de Moivre.

En lisant le compte rendu de la séance du 15 mai 1837 des séances de l'Académie, où Sturm et Liouville ont inséré une note

sur leur travail de 1836, Cauchy « regrette » qu'un mémoire lithographié à Turin le 15 juin 1833 (9) soit inconnu des auteurs de la note car « ils y auraient vu qu'[il] était complètement d'accord avec eux sur l'utilité de résoudre par des principes élémentaires les questions relatives à la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires des équations ». Il en profite pour rappeler que lui-même avait déjà, dans ce mémoire, résolu « directement de semblables questions sans recourir à des formules de calcul intégral ». Il précise, en outre, qu'il avait ce projet dès 1813 et l'avait esquissé dans les dernières lignes d'un mémoire présenté à l'Institut le 17 mai de cette année 1813 (10). Il termine, enfin, en reconnaissant que Sturm et Liouville, n'ayant eu aucune connaissance de son mémoire, qui d'ailleurs ne renfermait pas explicitement la démonstration qu'il y avait en vue [!], « ont tout le mérite de la découverte » [Cauchy, 1837b, 81-83].

Il est donc clair que l'idée de « démonstration élémentaire » fut imposée par le travail de Sturm et Liouville sur le théorème de Cauchy. Aussi, en reprenant le contenu de ses mémoires lithographiés de Turin de 1831 et 1833 dans le « Calcul des indices des fonctions », celui-ci confirme l'exigence de ne pas recourir « à des formules du calcul intégral » [Cauchy, 1837a, 416]. Cependant, il conserve la notion d'indice et d'indice intégral d'une fonction u entre les limites x_0 et X et garde aussi bien la notation empruntée au calcul des résidus $g_{x_0}^X((u))$. C'est ainsi qu'il établit par exemple :

$$g_{x_0}^X \frac{((u))}{v} = g_{x_0}^X \frac{((w))}{v}$$

où u , v sont des fonctions entières de x et w le reste de la division euclidienne de u par v (degré $u \geq$ degré v). Reprenant l'idée de Sturm, Cauchy conclut que la détermination de l'indice intégral d'une fraction rationnelle entre des limites données peut être réduite à la détermination de l'indice intégral d'une autre fraction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de degré moindre. D'ailleurs, une réduction semblable pourra s'appliquer non seulement à la nouvelle fraction mais encore à

(9) Il s'agit d'une première version de [Cauchy, 1837a] (voir OC (2), XV, 588).

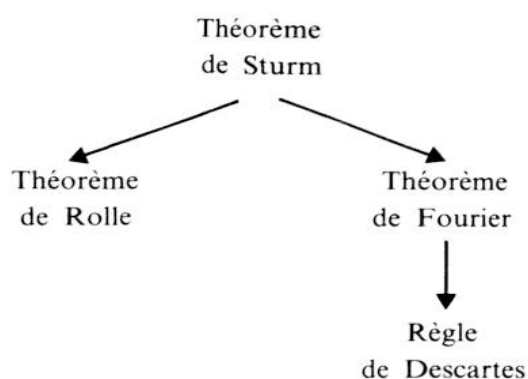
(10) Il s'agit d'un des mémoires dont le contenu a été repris dans [Cauchy, 1815]. N'oublions pas qu'en 1813 Sturm n'avait que dix ans !

toutes les fractions que l'on en déduira successivement en divisant l'un par l'autre deux restes consécutifs obtenus dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux polynômes u et v [Cauchy, 1837a, théorème II, 420]. Le théorème IV [*ibid.*, 426-429] est une version à peine modifiée de [Sturm, 1829a]. Les théorèmes X et XI de la deuxième section correspondent au théorème de [Cauchy, 1831]. Cauchy signale, une fois de plus, que des « démonstrations élémentaires » en ont été données, pour la première fois, par Sturm et Liouville.

L'abbé Moigno ne se fera pas faute d'étudier le mémoire de Sturm et Liouville, et de lui emprunter sa démonstration afin de pallier l'inconvénient des notations de Cauchy, qui ont « trop d'analogie avec les notations ardues du calcul intégral ».

« On ne verra peut-être pas sans plaisir, poursuit-il en faisant l'éloge de Sturm, comment on peut déduire d'un *principe unique et facile à saisir* (11), un grand nombre de théorèmes qui jusqu'ici demandaient des démonstrations indépendantes, souvent pénibles, et dont le seul énoncé aurait effrayé, il y a trente ans, les plus habiles analystes. Lagrange et Legendre auraient en effet eu de la peine à croire qu'on arriverait par *des procédés très élémentaires* (12) à déterminer, pour une équation de degré quelconque, le nombre de racines imaginaires dont la partie réelle et le coefficient de $\sqrt{-1}$ sont compris entre des limites données. » [Moigno, 1840, 75-76.]

[Moigno, 1840] expose [Sturm, 1829a] en mettant bien en évidence les relations logiques entre le théorème d'algèbre de Sturm et ses corollaires logiques qui, historiquement, l'ont précédé : théorème de Rolle, de Fourier, règle de Descartes. On obtiendrait ainsi le diagramme suivant :



(11) Souligné par nous.

(12) Souligné par nous.

Par ailleurs, il expose simultanément [Sturm, 1829a] et [Cauchy, 1831] revu et corrigé par Sturm et Liouville. On voit clairement que seuls des rudiments de trigonométrie et la formule de Moivre permettent de généraliser le calcul du nombre de racines d'une équation polynomiale $f(x)$ où x est une variable réelle à celui d'une équation $f(z)$ où $z = x + iy$, x et y étant réels. Or, il est remarquable que cette unification du cas réel et du cas complexe se trouve déjà esquissée dans [Sturm, 1835, § 20, 313-314]. Sturm remarque en effet que la condition qui impose aux deux premières fonctions V et V_1 d'une suite de Sturm d'être de signes contraires pour $x = c - \varepsilon$ et de même signe pour $x = c + \varepsilon$, où c est une racine simple de V et ε une quantité infiniment petite, équivaut au fait

que le quotient $\frac{V}{V_1}$ passe toujours du négatif au positif quand

V s'annule pour une valeur c de x . Si l'on considère alors une suite quelconque V, V_1, V_2, \dots, V_r , où V_1 n'est pas la dérivée de V et où V_2, V_3, \dots, V_r sont obtenues par division sturmienne, il y a

trois possibilités pour le quotient $\frac{V}{V_1}$: 1) passer du négatif au positif;

2) passer du positif au négatif; 3) ne pas changer de signe. Dans le premier cas, la suite des signes perd une variation; dans le second cas, elle en gagne une; dans le troisième, le nombre de variations demeure inchangé. On peut donc reformuler [Sturm, 1829a] de la façon suivante : le nombre m de racines de l'équation $V = 0$ comprises dans l'intervalle réel $[a, b]$ pour lesquelles $\frac{V}{V_1}$ passe du

négatif au positif, moins le nombre n de racines de $V = 0$ comprises dans $[a, b]$ pour lesquelles $\frac{V}{V_1}$ passe du positif au négatif,

est égal au nombre $N_a - N_b$ de pertes de variations de signes de V, V_1, \dots, V_r entre a et b . Puisque donc $m - n = N_a - N_b$, $m + n$, qui est le nombre total des racines de $V = 0$ sur $[a, b]$, est égal à $N_a - N_b + 2n$. Si V_1 est la dérivée de V ou une fonction de même signe que cette dérivée, $n = 0$ et on retrouve $m = N_a - N_b$ = le nombre de racines de $V = 0$ sur $[a, b]$.

[Sturm, 1836c] reprend sans changement ce raisonnement de [Sturm, 1835]. Il signale, de plus, que l'ayant formé dès 1829, il l'avait omis dans sa présentation du *Bulletin de Férussac* [Sturm, 1829a] et ne l'a consigné qu'en 1835. Ce qui est une façon de

revenir encore sur l'antériorité et l'indépendance de ses découvertes par rapport à celles de Cauchy en ce qui concerne le nombre ou la localisation des racines des équations algébriques. Sturm considère donc, pour $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$, un contour ABC dans le plan; les coordonnées d'un point quelconque de ABC peuvent être exprimées par les fonctions rationnelles d'une variable s ; le quotient $\frac{P}{Q}$ prendra la forme d'une fraction $\frac{V}{V_1}$ dans laquelle V et V_1 sont des fonctions entières de s . En construisant « la suite de Sturm » V, V_1, V_2, \dots, V_r , on verra que l'excès du nombre j de fois où $\frac{V}{V_1}$ s'annule en passant du positif au négatif sur le nombre k de fois où elle s'annule en passant du négatif au positif est égal au nombre de variations de signes perdues par la suite V, V_1, V_2, \dots, V_r entre les valeurs $s = \alpha$ et $s = \beta$ relatives aux points A et B. Or [Sturm, 1836c] a démontré que $j - k$ est double du nombre de racines de $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ dans le contour donné.

CONCLUSION

Ainsi, pour ce qui concerne les méthodes, Cauchy est redevable à Sturm plutôt que l'inverse. Mais en ce qui concerne la signification prêtée à ces méthodes, l'influence s'est probablement exercée dans le sens contraire. En observant que la méthode de [Cauchy, 1829a] est « purement algébrique », Sturm semble moins énoncer un jugement personnel que répéter ce que Cauchy a lui-même souligné dans l'introduction de son mémoire. Quand il reprend l'exigence à son compte en 1836, il le fait d'une façon qui introduit une sorte de synonymie entre démonstration algébrique et démonstration simple ou élémentaire. Or, pour Cauchy, l'idée de simplicité va de pair avec celle de plus grande généralité. Si bien que dans leur accord à préférer se restreindre aux « premiers principes de l'Algèbre », Cauchy et Sturm affirment la quasi-substituabilité des adjectifs « algébrique », « simple », « élémentaire », « général ». Ce fait, qui n'est évidemment thématise ni

par Sturm ni par Cauchy, est moins banal qu'il n'y paraît, si on songe aux efforts modernes, notamment dans la théorie des modèles, pour définir la propriété « être algébrique » par rapport à l'idée de « langage élémentaire » défini comme un langage logique obéissant aux lois et aux restrictions du calcul des prédicats du premier ordre. Abraham Robinson, par exemple, tente une caractérisation intéressante de ce que le mathématicien entend par « algébrique » [Robinson, 1975].

Mais, pour finir sur Sturm et Cauchy, notons que s'ils concevaient comme algébrique ce qui se rapporte aux équations polynomiales, ils n'avaient cependant pas idée d'une discipline absolument autonome, coupée de concepts analytiques ou trigonométriques. En vertu de la synonymie sus-mentionnée, les « premiers principes de l'Algèbre » constituaient plutôt une sorte d'étiquette pour un certain nombre de propositions jugées fondamentales, c'est-à-dire indispensables à la démonstration d'un grand nombre d'autres propositions dispersées dans l'ensemble du champ mathématique, et non pas cantonnées dans le seul domaine de la théorie des équations.

Hourya SINACEUR.

BIBLIOGRAPHIE

- Artin (E.) & Schreier (O.),
[1926] Algebraische Konstruktion reeller Körper, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburger Universität*, 5, 85-99.
- Benis-Sinaceur (ou Sinaceur) (H.),
[1988] Deux moments dans l'histoire du théorème d'algèbre de Ch.-F. Sturm, *Revue d'histoire des sciences*, XLI, 2, 99-132.
[1991] *Corps et Modèles. Essai sur l'histoire de l'algèbre réelle* (Paris : Vrin). Coll. « Mathesis ».
- Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*,
[1829-1831] publ. sous la dir. de M. le baron de Férussac, t. 11 à 16, 1829 à 1831.
- Cauchy (A.-L.),
[1815] Mémoire sur la détermination du nombre des racines réelles dans les équations algébriques, *Journal de l'Ecole polytechnique*, XVII^e Cahier, dans OC (2), I, 170-257.
[1829a] Mémoire sur la résolution numérique des équations et sur la théorie de l'élimination, *Exercices de mathématiques*, 40^e et 41^e livraisons, dans OC (2), IX, 87-161.

- [1829b] Mémoire sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes, *ibid.*, 42^e livraison, dans *OC* (2), IX, 174-195.
 - [1831] Mémoire sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites et sur les avantages qu'offrent ces deux nouveaux calculs dans la résolution des équations algébriques ou transcendentes : lithographie publ. par R. Taton dans *OC* (2), XV, 182-261 ; résumés impr. dans le *Bulletin de Férussac*, XVI (1831), 116-119 et 119-128 et reproduits dans *OC* (2), II, 169-183.
 - [1837a] Calcul des indices des fonctions, *Journal de l'Ecole polytechnique*, XXV^e Cahier, dans *OC* (2), I, 416-466.
 - [1837b] Extraits de lettres de l'année 1837, numérotées de 9 à 18, dans *OC* (1), IV, 38-99.
- Colladon (D.),
- [1857] Lettre à J.-B. Dumas (10 mai), aux Arch. de l'Acad. des sciences de Paris, dossier Colladon.
 - [1878] Biographie de Sturm : pièces autographes communiquées par Colladon à A. Massé en 1878, à la Bibl. publique univ. de Genève, départ. des manuscrits, fr. 3748, f^o 176-186.
- Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris*,
[1835-1840] (Paris : Bachelier).
- Fourier (J.),
- [1831] *Analyse des équations déterminées* (Paris : Firmin Didot).
[Publication posthume d'une partie, tout entière connue de Sturm avant 1829, du livre conçu par Fourier pour rassembler un ensemble de résultats dont certains remontaient à 1796-1797.]
- Hermite (Ch.),
- [1852] Sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équations simultanées, *Extrait des Comptes rendus de l'Acad. des sc.*, 35. (= Ch. Hermite, *Œuvres*, éd. par E. Picard (Paris : Gauthier-Villars, 1905-1917), vol. 1, 281-283).
 - [1912] Mémoire sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équations simultanées, dans *Œuvres*, *op. cit.*, vol. 3, 1-34.
[Ce mémoire correspond à l'extrait précédent.]
- Lagrange (J.-L.),
- [1798] *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés* (Paris : Duprat). (= *Œuvres* de Lagrange, t. VIII (Paris : Gauthier-Villars).)
- Moigno (F.),
- [1840] Note sur la détermination du nombre de racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique, comprises entre des limites données, *Journal de math. pures et appl.*, 5, 75-94.
- Procès-verbaux des séances de l'Académie des sciences*,
[1921-1922] t. 9 : 1828-1831, t. 10 : 1832-1835 (Hendaye : Impr. de l'Observatoire d'Abbadia).
- Robinson (A.),
- [1975] Algorithms in algebra, in *Model theory and algebra. A memorial tribute to Abraham Robinson*, ed. by A. Dold and B. Eckmann (Berlin-Heidelberg-New York : Springer Verlag), « Lectures Notes in Mathematics », n^o 498, 15-40.

Rolle (M.),

[1690] *Traité d'algèbre* (Paris).

Serret (A.),

[1849] *Cours d'algèbre supérieure* (Paris : Bachelier).

Steinitz (E.),

[1910] Algebraische Theorie der Körper, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 137, 167-309.

Sturm (Ch.-F.),

[1829a] Analyse d'un mémoire sur la résolution des équations numériques, *Bulletin de Férussac*, XI, n° 271, 419-422.

[1829b] Compte rendu des 40^e, 41^e et 42^e livraisons des *Exercices de mathématiques* de A.-L. Cauchy, *ibid.*, XII, n° 192, 301-303.

[1829c] Extrait d'un mémoire sur l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires, *ibid.*, XII, n° 196, 313-322.

[1835] Mémoire sur la résolution des équations numériques, *Mémoires présentés par divers Savants étrangers à l'Acad. royale des sc., section sc. math. phys.*, VI, 273-318.

[1836a] Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre, *Journal de math. pures et appl.*, 1, 106-186.

[1836b] Mémoire sur une classe d'équations à différences partielles, *ibid.*, 1, 373-444.

[1836c] Démonstration d'un théorème de Cauchy (avec J. Liouville), *ibid.*, 1, 278-289.

[Autre démonstration du même théorème : *ibid.*, 1, 290-308.]

[1837] Note sur un théorème de Cauchy relatif aux équations simultanées, *Comptes rendus des séances de l'Acad. des sc. de Paris*, 4, 720-724.

Annales

Économies Sociétés Civilisations

Fondateurs : Lucien FEBVRE et Marc BLOCH. Directeur : Fernand BRAUDEL
Revue bimestrielle publiée depuis 1929 avec le concours
de l'École des Hautes Études en Sciences Sociales

47^e ANNÉE — N° 1

JANVIER-FÉVRIER 1992

SYSTÈMES D'EXPLOITATION

Charles VAN ONSELEN, Paternalisme et violence dans les fermes du Transvaal de 1900 à 1950

Alessandro STELLA, L'esclavage en Andalousie à l'époque moderne

L'ART ET SES PRATIQUES

Peter J. A. N. RIETBERGEN, Art, pouvoir et politique dans l'ordre augustinien au XVII^e siècle

Alain GUERREAU, Édifices médiévaux, métrologie, organisation de l'espace, à propos de la cathédrale de Beauvais

Croyances, religions et sociétés (comptes rendus)

SOCIÉTÉS PLURICULTURELLES

Michel DUBUISSON, Le grec à Rome à l'époque de Cicéron, extension et qualité du bilinguisme

Claire et Jean-Marie PAILLER, Une Amérique vraiment latine : pour une lecture « dumézilienne » de l'Inca Garcilaso de la Vega

MÉTIER D'HISTORIEN, 4

Paula BRAUDEL, Les origines intellectuelles de Fernand Braudel : un témoignage

Youri BESSMERTNY, Les *Annales* vues de Moscou

Bernard LEPETIT et Jacques REVEL, L'expérimentation contre l'arbitraire

RÉDACTION : 54, Boulevard Raspail, 75006 PARIS

ABONNEMENTS 1992 • France : 328 F - Étudiants France : 245 F
• Étranger : 87 \$ - Pays de la CEE : 70 écus
• Le numéro : 90 F

Les abonnements doivent être souscrits auprès d'Armand COLIN Éditeur,
B.P. 22 - 41353 VINEUIL